مطالعات حسابداری و حسابرسی، بهار ۱۴۰۰، شماره ۳۷، از صفحه ۴۱ تا ۵۸

کاربرد فرآیندهای تصادفی از نوع زنجیره های مارکف در حسابداری

دکتر سید رسول حسینی[1]©

استادیار بخش حسابداری دانشگاه زنجان

(تاریخ دریافت: ۱۳ مهر ۱۳۹۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۶ بهمن ۱۳۹۸)

در خصوص استفاده از مباحث مربوط به فرآیندهای تصادفی در حوزه‌های مختلف دانش بشری استفاده‌های گوناگونی به‌عمل‌آمده است. ازجمله فرآیندهای بسیار مهمی که در فرآیندهای تصادفی موردمطالعه قرار می‌گیرد، فرآیند مارکوف می‌باشد. مطالعه این نوع فرآیند در شاخه‌های علوم پایه و مهندسی جهت درک رفتار پدیده‌ها و مدل‌سازی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. اما به‌کارگیری این نوع فرآیند تنها محدود به علوم پایه و مهندسی نبوده و می‌توان از آن در حوزه‌های مختلف علوم انسانی به‌منظور مدل‌سازی استفاده نمود. به‌عنوان‌مثال، در حوزه جمعیت‌شناسی برای پیش‌بینی جمعیت نسل‌های آینده و یا در زمینه روانشناسی برای پیش‌بینی رفتار افراد فرآیند مارکوف می‌تواند کمک‌کننده باشد. با توجه به اینکه تابه‌حال طرح مفاهیم فرآیندهای تصادفی در حوزه حسابداری در سطح مقالات و تحقیقات بین‌المللی و داخلی بسیار محدود بوده است، در این مقاله سعی گردیده است تا مفاهیم نظری مربوط به فرآیندهای تصادفی بیان‌شده و سپس به بیان زنجیره‌های مارکوف و نمونه کاربردهای آن اشاره نماییم.

واژه‌های کلیدی: فرآیندهای تصادفی، زنجیره‌های مارکوف، ماتریس انتقال، بردار ثابت.

© (نویسندهٔ مسئول)

[1] rasoulhosayni@yahoo.com

مقدمه

نظریه احتمال در حال حاضر به‌صورت مجموعه‌ای از اطلاعات بسیار قوی درآمده است که از توجهی زیاد در ریاضیات و از اهمیتی کاربردی برخوردار است. این نظریه معمولاً در زمینه‌های مختلفی ازجمله مالی و حسابداری برای استنتاج درست مطالب آماری، پیش‌بینی آینده و تصمیم‌گیری در خصوص اینکه چه سیاستی بایستی دنبال شود، کاربرد دارد و ابزاری ضروری به شمار می‌آید. در اینجا هدف آن است که به کمک مباحث مطرح در حوزه نظریه احتمال و مدل‌سازی تصادفی بتوانیم برخی از پدیده‌های احتمالی را تبیین و پیش‌بینی نماییم. در این راستا، استفاده از مباحث مطرح در فرایندهای تصادفی می‌تواند کمک شایانی به تحقق این هدف نماید. بنابراین، در این تحقیق ابتدا فرایندهای تصادفی معرفی‌شده و سپس به بحث در خصوص زنجیره‌های مارکوف که خود نوع خاصی از فرایندهای تصادفی می‌باشد، می‌پردازیم. لازم به ذکر است که به دلیل گستردگی مباحث مربوط به زنجیره‌های مارکوف در اینجا بحث خود را محدود به حوزه‌های خاصی از آن می‌نماییم.

مفهوم فرایندهای تصادفی

فرایند تصادفی[۱] بسط مفیدی از متغیرهای تصادفی[۲] است. در تعریف می‌توان گفت که متغیر تصادفی X با مقادیری واقع در مجموعه E تابعی است که به هر برآمد ω واقع در فضای نمونه‌ای Ω مقدار $X(\omega)$ در E را نسبت می‌دهد. به‌عنوان‌مثال، در آزمایش پرتاب یک‌بار سکه، دو برآمد ممکن «شیر» و «خط» هستند که در این صورت فضای نمونه‌ای $\Omega = \{H.T\}$ خواهد بود. حال فرض کنیم X به‌صورت $X(H) = 1$ و $X(T) = -1$ تعریف‌شده باشد. در این صورت X یک متغیر تصادفی است که مقادیر خود را از مجموعه $E = \{1.-1\}$ اختیار می‌کند. به مجموعه E در اصطلاح فضای حالت[۳] گفته می‌شود. لازم به ذکر است که فضای حالت می‌تواند از نوع پیوسته و یا گسسته باشد. در مثال پرتاب سکه، فضای حالت از نوع گسسته می‌باشد. درصورتی‌که فضای حالت مقداری در $(-\infty.\infty)$ اختیار نماید، نوع فضای حالت پیوسته خواهد بود. حال فرض می‌کنیم T مجموعه‌ای دلخواه و به ازای هر $t \in T$ ، X_t متغیری تصادفی و $E \subset R$ مجموعه ثابتی باشد و مقادیر متغیرهای تصادفی X_t در داخل این مجموعه باشد. یک فرایند تصادفی با فضای حالت E، گردایه $\{X_t: t \in T\}$ از متغیرهای تصادفی X_t است که بر یک فضای احتمال تعریف‌شده‌اند و مقادیر خود را در مجموعه E اختیار می‌کنند. مجموعه T را فضای پارامتر می‌گویند. اگر $A \subset E$ (یا $x \in E$) و $X_t \in A$ (یا $X_t = x$) می‌گوییم فرایند در زمان (یا مرحله) t در مجموعه A (یا در حالت x) قرار دارد. اگر T مجموعه‌ای شمارا و به‌خصوص اگر $T = N = \{0.1. \ldots\}$ باشد، فرایند را گسسته- زمان[۴] (بازمان گسسته) و اگر مجموعه‌ای به‌صورت $(0.\infty)$ یا $(-\infty.\infty)$ باشد

[1] Stochastic Process
[2] Random Variables
[3] State Space
[4] Discrete Time

آن را پیوسته- زمان[1] (بازمان پیوسته می‌گوییم. معمولاً یک فرایند تصادفی باحالت گسسته را یک زنجیره[2] می‌نامند. برای هر ω از فضای نمونه‌ای مجموعه $\{X_t(\omega): t \in T\}$ را که زیرمجموعه‌ای از E است، تحقق یا مسیر نمونه‌ای[3] فرایند می‌گوییم. معمولاً اندیس t را زمان می‌گیرند. به‌این‌ترتیب X_t «حالت» یا «وضعیت» فرایند در زمان t است.

در خصوص فرایند تصادفی از نوع گسسته-زمان به مثالی اشاره می‌کنیم که در آن وضعیت سودآوری شرکت تشکیل‌دهنده فضای نمونه‌ای می‌باشد. برای این شرکت فضای نمونه‌ای به‌صورت $\Omega = \{P. L\}$ است که در آن برآمد P نشان‌دهنده وضعیت سود و برآمد L نشان‌دهنده وضعیت زیان برای شرکت می‌باشد. برای این شرکت متغیرهای تصادفی X_n، $n = 1.2.3. \dots.$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{اگر سال } n \text{ ام سود ده باشد} \\ 0 & \text{اگر سال } n \text{ ام زیان ده باشد} \end{cases}$$

در این صورت $\{X_n: n \geq 1\}$ فرایند تصادفی گسسته- زمان است که فضای حالت آن $E = \{0.1\}$ و شمارا است. اگر نتیجه عملیات این شرکت برای یک دوره ده‌ساله به‌صورت $\omega = LLPPPPLPPL$ بوده باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) = X_7(\omega) = X_{10}(\omega) = 0$$
$$X_3(\omega) = X_4(\omega) = X_5(\omega) = X_6(\omega) = X_8(\omega) = X_9(\omega) = 1$$

در این مثال، وضعیت شرکت (یعنی $X(\omega)$) در سال‌های ۱، ۲ ، ۷ و ۱۰ در حالت زیان و در سال‌های ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹ در حالت سود بوده است. نمودار این مسیر نمونه‌ای به‌صورت زیر می‌باشد:

ازآنجاکه در بیشتر مباحث حوزه حسابداری از متغیرهایی استفاده می‌شود که نحوه اندازه‌گیری آنها به‌صورت سالانه صورت می‌گیرد و فضای حالتی که این متغیرها نوعاً به‌عنوان متغیر تصادفی تشکیل

[1] Continuous Time
[2] Chain
[3] Sample Path

میدهند، می‌توانند شمارا تعریف شوند، بنابراین، بحث خود را محدود به فرایندهای تصادفی از نوع گسسته-زمان می‌نماییم. به‌عنوان‌مثال، در حسابداری، سود حسابداری یکی از متغیرهای موردمطالعه می‌باشد. ازآنجاکه این متغیر معمولاً به‌صورت سالانه اندازه‌گیری و ارائه می‌شود و می‌توان فضای حالت شمارا برای آن تعریف نمود، می‌توان از دیدگاه فرایندهای تصادفی از نوع گسسته-زمان آنها را بررسی نمود.

قانون فرایند تصادفی

یکی از مباحث اصلی که در فرایندهای تصادفی مطرح می‌باشد، پیش‌بینی است. به‌عنوان‌مثال، فرض کنیم که X_n نوع عملکرد شرکت در سال n ام باشد. در این حالت فرایند تصادفی از نوع گسسته زمان است. حال، اطلاعات مربوط به عملکرد شرکت تا زمان حاضر در دست بوده و بر اساس این اطلاعات قصد داریم تا عملکرد دوره آتی شرکت را برآورد نماییم. این مسئله نوعی پیش‌بینی در فرایندهای تصادفی می‌باشد. به عبارت دقیق، مجموعه اطلاعات تا زمان s به‌صورت مجموعه $\{X_t: t \le s\}$ در دست است، می‌خواهیم به ازای $t \ge s$، X_t را برآورد کنیم. برای این منظور، فرض کنید $\{X_n: n = 0.1.2. \dots\}$ فرایندی تصادفی بازمان گسسته و فضای حالت شمارای $E = \{a_0. a_1. \dots\}$ باشد. حال قصد داریم تا عمل پیش‌بینی را انجام دهیم، بدین معنی که فرایند مثلاً تا زمان m مشاهده است و با این مشاهدات مقدار متغیر X_n $(n \ge m)$ برآورد می‌گردد. به‌عبارت‌دیگر، با معلوم بودن مقدار متغیرهای $X_m. \dots. X_1. X_0$ می‌خواهیم توزیع X_n را به دست آوریم. یعنی در اصل منظور محاسبه مقدار احتمال زیر است:

$$P(X_n = y | X_0 = x_0. \dots. X_m = x_n)$$

میزان موفقیت ما دریافتن توزیع شرطی فوق تا حد زیادی بستگی به نوع رابطه‌ای دارد که ازنظر احتمالاتی بین متغیرها برقرار است. به‌عنوان‌مثال، اگر متغیرهای تصادفی $X_1. X_0 \dots$ با هم برابر باشند، یعنی $X_1 = X_2 = \cdots$، در این صورت پیش‌بینی به‌طور کامل انجام می‌شود. زیرا در این حالت فقط با مشاهده $X_0 = x_0$، بی‌درنگ مقدار تمام متغیرها معلوم می‌شود، یعنی به ازای هر $n \ge 1$، $X_n = x_0$. بالعکس، اگر X_n ها مستقل باشند آنگاه اطلاعات $X_0 = x_0. \dots. X_m = x_m$ هیچ‌گونه کمکی دریافتن توزیع شرطی بالا نخواهند کرد.

دراین‌بین سیستم‌هایی وجود دارند که مدل فرایند آنها نه از بستگی کامل مثال اول و نه از عدم وابستگی کامل مثال دوم پیروی می‌کنند. بلکه اطلاعات گذشته تا حدودی و به صورتی در رفتار آینده مؤثر هستند. ازجمله ساده‌ترین این وابستگی‌ها، ویژگی مارکوف است که در ادامه به مطالعه آن می‌پردازیم.

معرفی فرایندهای مارکوف

فرض کنید وضعیت یک فرایند را از زمان t_0 تا زمان t_k مشاهده می‌کنیم به‌طوری‌که $t_0 \le t_1 \le 000 \le t_{k-1} \le t_k$. علاوه بر این فرض کنید مقدار x_k در زمان t_k «حالت فعلی» این فرایند و $\{x_0. x_1. 000. x_{k-1}\}$ «سابقه‌ی گذشته‌ی» فرایند باشد. آنگاه $\{x_{k+1}. x_{k+2}. 000\}$ برای زمان‌های $t_{k+1} \le t_{k+2} \le 000$ «زمان آینده» است که ناشناخته هستند. در فرایندهای مستقل، آینده کاملاً مستقل از گذشته است و فقط به حالت فعلی بستگی دارد. به‌عبارت‌دیگر، کل سابقه‌ی گذشته در حالت

جاری خلاصه می‌شود. این ویژگی را ویژگی بدون حافظه بودن[1] می‌نامند، زیرا برای پیش‌بینی احتمال آینده، به سابقه‌ی گذشته نیاز نداریم بلکه فقط به حالت جاری نیاز داریم. فرایند تصادفی را در صورتی فرایند مارکوف می‌گوییم که به ازای $t_0 \leq t_1 \leq 000 \leq t_k \leq t_{k+1}$ داشته باشیم:

$$P((X(t_{k+1}) \leq X_{k+1} | X(t_k) = x_k . X(t_{k-1}) = x_{k-1} . \dots . X(t_0) = x_0)) \\ = P((X(t_{k+1}) \leq X_{k+1} | X(t_k) = x_k))$$

این ویژگی بدون حافظه بودن را خاصیت مارکوفی نیز می‌نامند. خاصیت بدون حافظه بودن دارای دو جنبه می‌باشد: ۱) به هیچ‌کدام از اطلاعات گذشته نیاز نداریم و ۲) مدت‌زمانی که فرایند در حالت جاری بوده است، تأثیری ندارد.

در زنجیره مارکوف بازمان گسسته، زمان و حالت سیستم مقادیر گسسته را می‌پذیرند، یعنی زمان و فضای حالت گسسته است. حال در تعریف زنجیره مارکوف بازمان گسسته می‌توان گفت که زنجیره‌ی مارکوف بازمان گسسته یک فرایند تصادفی $\{X_n: n = 0.1.2. \dots\}$ است که در آن X_n حالت سیستم در زمان گسسته‌ی n است به‌طوری‌که به ازای $n \geq 0$ و به ازای هر i و j و به ازای هر $i_0 . i_1 . \dots . i_{n-1}$ داریم:

$$P(X_{n+1} = y | X_0 = x_0 . X_1 = x_1 . \dots . X_{n-1} = x_{n-1} . X_n = x) \\ = P(X_{n+1} = y | X_n = x)$$

این تعریف درواقع کاربرد خاصیت مارکوفی را نشان می‌دهد. یعنی فقط اطلاع از حالت فرایند در مرحله n برای تعیین توزیع حالت فرایند در مرحله $n + 1$ کفایت می‌کند و اطلاعات قبل از آن مؤثر نخواهند بود.

احتمال شرطی $P(X_{n+1} = y | X_n = x)$ را احتمال انتقال[2] یک مرحله‌ای (از x در مرحله n ام به y در مرحله $n + 1$ ام) می‌نامیم. همان‌طور که از ظاهر این احتمال شرطی پیداست، این احتمال بستگی به x ، y و n دارد. در این بحث، تنها به نوع زنجیره‌های مارکوفی خواهیم پرداخت که این احتمال به n بستگی نداشته باشد. چنین زنجیره‌های مارکوفی را در اصطلاح زنجیره مارکوف همگن[3] می‌گویند و احتمال‌های انتقال را که با P_{xy} نشان می‌دهند به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P_{xy} = P(X_{n+1} = y | X_n = x). \quad n \geq 0 . x . y \in E$$

به‌منظور تبیین مقدار احتمال فوق، فرض کنید در خصوص جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های عملیاتی متغیر تصادفی X به‌صورت زیر تعریف‌شده باشد:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{اگر سال} n \text{ ام جریان های نقدی عملیاتی مثبت باشد} \\ 0 & \text{اگر سال} n \text{ ام جریان های نقدی عملیاتی منفی باشد} \end{cases}$$

در یک سال مشخص (سال n ام)، جریان‌های نقدی عملیاتی شرکت مثبت بوده است و انتظار می‌رود که با احتمال ۰/۱۵ جریان‌های نقدی عملیاتی شرکت (سال $n + 1$ ام) منفی گردد. به مقدار احتمال ۰/۱۵

1 Memory Less
2 Transition Probability
3 Homogeneous Markov Chain

در اصطلاح احتمال انتقال از وضعیت ۱ به وضعیت ۰ طی یک مرحله (در این مورد یک سال) گفته می‌شود و آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$P_{01} = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = 0/15$$

قبل از اینکه بحث خود را در زمینه زنجیره‌های مارکوف ادامه دهیم نیاز است تا بردارهای احتمال و ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای (ماتریس تصادفی) تبیین گردد.

بردارهای احتمال

بردار $u = (u_1.u_2.\dots.u_n)$ بردار احتمال[1] خوانده می‌شود اگر تمام مؤلفه‌های آن اعداد نامنفی بوده و مجموع آنها برابر با ۱ گردد. به‌عنوان‌مثال، بردار زیر یک بردار احتمال می‌باشد:

$$u = (\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.0.\frac{1}{2})$$

نکته مهمی که باید در محاسبات به آن توجه داشت این است که اگر یک بردار u با مؤلفه‌های نامنفی وجود داشته باشد، به‌طوری‌که مجموع آنها بزرگ‌تر از ۱ باشد، می‌توان مقدار ثابت λ را چنان انتخاب کرد که بردار λu یک بردار احتمال گردد. به‌عنوان‌مثال، اگر بردار u به‌صورت زیر باشد:

$$u = (2.3.4.0.1)$$

مجموع مؤلفه‌های این بردار برابر ۱۰ می‌گردد. بنابراین، اگر $\lambda = \frac{1}{10}$ انتخاب شود بردار λu یک بردار احتمال خواهد بود و داریم:

$$\lambda u = (0/2.0/3.0/4.0.0/1)$$

برای فهم بیشتر موضوع، به‌عنوان‌مثال درصورتی‌که تعداد شرکت‌های سود ده و زیان ده در یک سال معین به ترتیب ۲۰۰ شرکت و ۵۰ شرکت بوده باشد بردار $u = (200.50)$ و با در نظر گرفتن $\lambda = \frac{1}{250}$ بردار احتمال به‌صورت $\lambda u = (0/8.0/2)$ می‌گردد.

ماتریس احتمال انتقال[2] یک مرحله‌ای (ماتریس تصادفی[3])

ماتریس مربعی $P = [p_{ij}]$ را ماتریس تصادفی گویند درصورتی‌که هر سطر آن از یک بردار احتمال تشکیل‌شده باشد، یعنی هر عنصر این ماتریس عددی نامنفی بوده و مجموع عناصر هر سطر آن برابر ۱ باشد. در این ماتریس مؤلفه p_{ij} نشان‌دهنده‌ی احتمال انتقال از حالت فعلی i به حالت j در انتقال بعدی است. بنابراین، می‌توان گفت که در هر ماتریس تصادفی احتمال‌های انتقال دارای دو ویژگی زیر هستند:

(الف) به ازای هر $x.y \in E$ ، $p_{xy} \geq 0$

(ب) به ازای هر $x \in E$ ، $\sum_{y \in E} p_{xy} = 1$

در حالت کلی، اگر $E = \{0.1.2.\dots\}$ باشد، P به‌صورت زیر خواهد بود:

---

[1] Probability Vector

[2] Transition Matrix

[3] Stochastic Matrix

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

سطر x ام این ماتریس احتمال‌های رفتن از x به یکی از حالت‌های زنجیره در یک مرحله است. به‌عنوان‌مثال، ماتریس زیر با فضای حالت $E=\{0,1,2\}$ یک ماتریس تصادفی می‌باشد:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

زیرا همان‌طور که در ماتریس فوق مشاهده می‌شود، حاصل جمع مؤلفه‌های هر سطر نامنفی بوده و حاصل جمع آنها نیز برابر با یک می‌باشد. در این ماتریس مؤلفه $p_{12}=\frac{1}{3}$ نشان می‌دهد که احتمال انتقال از وضعیت ۱ به وضعیت ۲ طی یک مرحله برابر با $\frac{1}{3}$ است و طبق ویژگی مارکوفی می‌توان چنین بیان نمود:

$$P_{12}=P(X_{n+1}=2|X_n=1)=\frac{1}{3}$$

به‌عنوان یک مثال کاربردی در حوزه حسابداری، احتمال تغییر جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری یک شرکت نمونه را می‌توان در شکل یک ماتریس تصادفی با فضای حالت $E=\{I.O\}$ (وضعیت I گویای جریان‌های نقدی ورودی و O گویای جریان‌های نقدی خروجی) به‌صورت زیر بیان نمود:

$$P=\begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix}$$

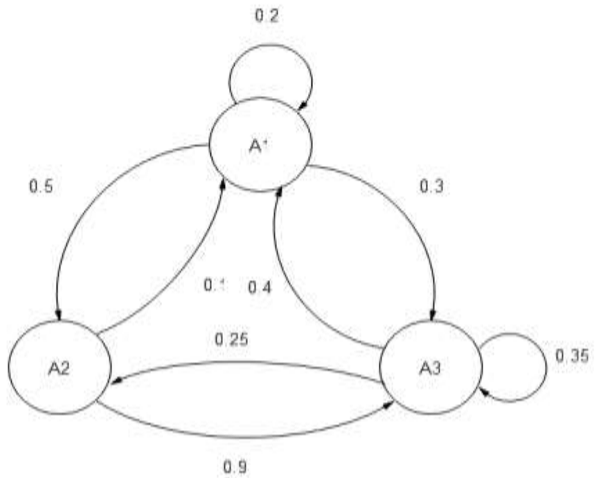
در ماتریس فوق مقدار هر مؤلفه نامنفی بوده و حاصل جمع مؤلفه‌های هر ردیف نیز برابر با ۱ می‌باشد. درنتیجه، ماتریس فوق یک ماتریس تصادفی می‌باشد. در این ماتریس، مقدار 0/85 نشان‌دهنده احتمال انتقال از وضعیت I به وضعیت I است، بدین معنی که احتمال اینکه در سال آینده جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری دوباره حالت ورودی داشته باشد برابر با 0/85 خواهد بود و مقدار این احتمال را با P_{II} نمایش می‌دهیم. عدد 0/15 گویای این مطلب است که با احتمال 0/15 در سال آینده جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری حالت خروجی خواهد داشت، درصورتی‌که در سال جاری جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری حالت ورودی داشته باشد. این مقدار احتمال را با P_{IO} نشان می‌دهیم. مقدار احتمال 0/55 بیان‌کننده احتمال تغییر وضعیت جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری از حالت خروجی به ورودی است که با نماد P_{OI} و مقدار احتمال 0/45 احتمال تغییر وضعیت جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری از حالت خروجی به خروجی است که با نماد P_{OO} نشان می‌دهیم. بدین معنی که اگر جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری در سال جاری منفی باشد به‌احتمال 0/45 نیز در سال آینده منفی خواهد بود.

نمودار انتقال

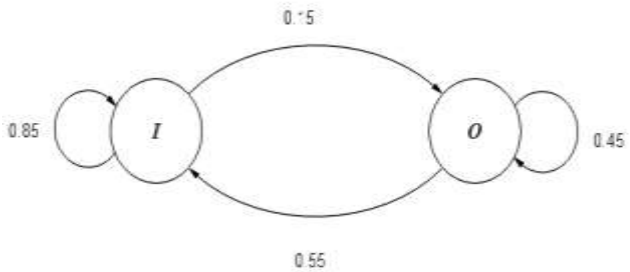
حالت های موجود در یک زنجیره مارکوف و احتمال های انتقال میان آنها را می توان بوسیله نموداری به نام نمودار انتقال[1] نشان داد که در آن حالت های A_i و A_j بوسیله کمانی به هم وصل شده اند و p_{ij} احتمال رفتن از حالت A_i به حالت A_j را نشان می دهد. بعنوان مثال، یک سیستم می تواند تنها در یکی از سه حالت A_1 ، A_2 و A_3 قرار گرفته و طبق زنجیره مارکوف همگن از حالتی به حالت دیگر تغییر حالت دهد. احتمال انتقال ها بوسیله ماتریس زیر نشان داده شده است:

$$P = \begin{bmatrix} 0/2 & 0/5 & 0/3 \\ 0/1 & 0 & 0/9 \\ 0/4 & 0/25 & 0/35 \end{bmatrix}$$

نمودار انتقال این سیستم بصورت زیر خواهد بود:



در خصوص شرکت نمونه نیز می توان نمودار انتقال را بصورت زیر ترسیم نمود:



[1] Transition Diagram

لازم به ذکر است که در تحلیل سیستم های مارکوفی رسم نمودار انتقال می تواند کمک شایانی درتجزیه و تحلیل سیستم نماید.

ماتریس احتمال انتقال چندمرحله‌ای

فرض کنیم $\{X_n: n = 0.1.2. \dots\}$ یک زنجیره مارکوف با فضای حالت E و ماتریس احتمال $P = [p_{xy}]$ باشد. به ازای $n \geq 1$ و m ، احتمال های:

$$P(X_{n+m} = y | X_m = x) \qquad x.y \in E$$

را احتمال‌های انتقال n مرحله‌ای می‌گوییم و با علامت $p_{xy}^{(n)}$ نشان می‌دهیم. ماتریس این احتمال‌ها را ماتریس احتمال انتقال n مرحله‌ای می‌گوییم و با علامت p^n نشان می‌دهیم. در خصوص $p_{xy}^{(n)}$ شرایط زیر همواره برقرار است:

(الف) به ازای هر $x.y \in E$ ، $p_{xy}^{(n)} \geq 0$

(ب) به ازای هر $x \in E$ ، $\sum_{y \in E} p_{xy}^{(n)} = 1$

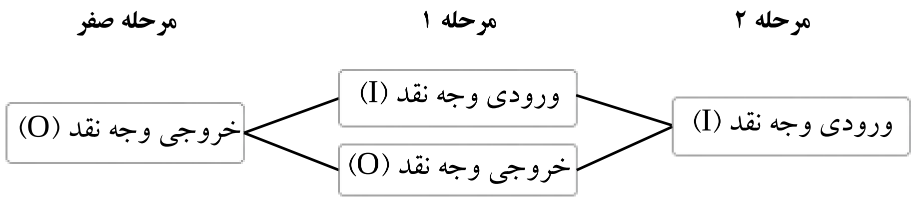
برای نشان دادن مفهوم احتمال انتقال چندمرحله‌ای به مثال شرکت نمونه دقت کنید. لازم به ذکر است که در این مثال واژه «مراحل» اشاره به «سال» دارد. یعنی زمانی که در مورد احتمال انتقال یک مرحله‌ای صحبت می‌کنیم منظور ما احتمال انتقال طی یک سال می‌باشد. به همین صورت، زمانی که صحبت از انتقال n مرحله‌ای در میان است قصد داریم تا احتمال انتقال را در سال n ام محاسبه نماییم. در مثال شرکت نمونه، ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای تغییر جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری به‌صورت زیر بود:

$$P = \begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید قصد داشته باشیم تا احتمال انتقال از جریان‌های نقدی خروجی حاصل از فعالیت‌های سرمایه گذری به جریان‌های نقدی ورودی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری را طی دو سال محاسبه نماییم. به‌عبارت‌دیگر، می‌خواهیم احتمال اینکه جریان خروجی طی دو سال به جریان ورودی تبدیل شود، را به دست آوریم. برای این منظور سال جاری را مرحله صفر، سال اول را مرحله ۱ و سال دوم را مرحله دوم در نظر می‌گیریم. از دیدگاه آماری، درواقع بایستی مقدار احتمال شرطی زیر محاسبه گردد:

$$P(X_2 = I | X_0 = O)$$

برای محاسبه این احتمال شرطی، ابتدا به‌صورت مفهومی آن را تبیین می‌کنیم. اگر جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری سال جاری (مرحله صفر) حالت خروجی داشته باشد، ممکن است در سال آینده (مرحله ۱) حالت ورودی و یا خروجی به خود بگیرد. بنابراین، در مرحله ۱ ما مقدار احتمال $p_{OO} = 0/45$ و $p_{OI} = 0/55$ را باید در نظر بگیریم. در انتقال از سال اول (مرحله ۱) به سال دوم (مرحله ۲) ممکن است جریان‌های نقدی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری از حالت ورودی به ورودی و یا از حالت خروجی به ورودی مبدل شود. در این حالت مقدار احتمال‌های $p_{II} = 0/85$ و $p_{OI} = 0/55$ بایستی در محاسبات لحاظ گردد. ازلحاظ نموداری، مفاهیم فوق به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:



حال، مقدار احتمال شرطی به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} P_{OI}^{(2)} = P(X_2 = I|X_0 = O) \\ &= P(X_1 = I|X_0 = O)P(X_2 = I|X_1 = I) \\ &+ P(X_1 = O|X_0 = O)P(X_1 = I|X_1 = O) \\ &= p_{OI}.p_{II} + p_{OO}.p_{OI} = (0/55)(0/85) + (0/45)(0/55) \\ &= 0/715 \end{aligned}$$

محاسبات فوق نشان می‌دهد احتمال اینکه جریان‌های نقدی خروجی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری سال جاری (مرحله صفر) به جریان‌های نقدی ورودی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری در سال دوم (مرحله دوم) تبدیل شود برابر با ۰/۷۱۵ و یا ۷۱/۵ ٪ خواهد گردید.

نکته مهمی که در اینجا بایستی به آن اشاره گردد آن است که محاسبه مقدار احتمال انتقال از وضعیت x به وضعیت y طی m مرحله با استفاده از نمودار درختی برای m های بزرگ می‌تواند کار سخت و خسته‌کننده‌ای باشد. به‌طورکلی، برای محاسبه مقدار احتمال انتقال وضعیت‌ها طی m مرحله کافی است توان m ام ماتریس تصادفی P را محاسبه نماییم که در این صورت مؤلفه p_{ij} ماتریس P^m مقدار احتمال انتقال از وضعیت i به وضعیت j را طی m مرحله نشان خواهد داد. در مورد مثال شرکت نمونه، عناصر ماتریس P^2 مقدار احتمال انتقال از وضعیت i به وضعیت j را طی 2 مرحله نشان می دهد:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0/805 & 0/195 \\ 0/715 & 0/285 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که در ماتریس فوق مشاهده می‌کنید، مؤلفه p_{OI} ، یعنی مؤلفه ردیف دوم و ستون اول، با مقدار احتمال ۰/۷۱۵ نشان‌دهنده احتمال انتقال از وضعیت O (وضعیت خروجی وجه نقد) به وضعیت I (وضعیت ورودی وجه نقد) طی دو مرحله می‌باشد. ماتریس P^2 ماتریس تصادفی می‌باشد، زیرا مؤلفه‌های هر ردیف غیر منفی بوده و مجموع آنها نیز برابر با یک می‌باشد. بنابراین، در حالت کلی می‌توان گفت که تمامی توان‌های ماتریس P نیز ماتریس‌های تصادفی خواهند بود.

توزیع احتمال وضعیت ها

فرض کنید در یک‌لحظه دلخواه احتمال اینکه سیستمی در حالت A_i باشد، برابر π_i است. این احتمال را به‌وسیله بردار احتمال $\pi = (\pi_1.\pi_2.\dots.\pi_k)$ که نشان‌دهنده توزیع احتمال در آن لحظه است، نشان می‌دهیم. توزیع احتمال $\pi^{(0)} = \left(\pi_1{}^{(0)}.\pi_2{}^{(0)}.\dots.\pi_k{}^{(0)}\right)$ را توزیع احتمال اولیه و توزیع احتمال $\pi^{(n)} = \left(\pi_1{}^{(n)}.\pi_2{}^{(n)}.\dots.\pi_k{}^{(n)}\right)$ را توزیع احتمال بعد از n مرحله گوییم. فرض کنید در مورد

مثال شرکت نمونه تعداد شرکت‌هایی که در وضعیت فعلی دارای جریان‌های نقدی ورودی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری بوده‌اند برابر با ۸۰ شرکت و تعداد شرکت‌هایی که دارای جریان‌های نقدی خروجی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری بوده‌اند برابر با ۲۰ شرکت بوده باشد. در این حالت، بردار توزیع اولیه برحسب درصد به‌صورت $\pi^{(0)} = (0/8.0/2)$ خواهد بود.

برای محاسبه توزیع احتمال وضعیت‌ها در مرحله n ام کافی است تا بردار توزیع احتمال اولیه را در توان مرتبه n ام ماتریس احتمال انتقال ضرب نماییم، یعنی:

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$$

به‌عنوان‌مثال، در مورد شرکت نمونه توزیع احتمال وضعیت‌ها در مرحله اول به‌صورت زیر محاسبه خواهد گردید:

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P^1 = [0/8 \quad 0/2] \begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix} = [0/79 \quad 0/21]$$

بردار توزیع احتمال مرحله اول نشان می‌دهد که تعداد ۷۹٪ از شرکت‌ها دارای جریان ورودی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری و ۲۱٪ نیز دارای جریان خروجی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری خواهند بود. برای محاسبه توزیع احتمال وضعیت‌ها در مرحله دوم نیز به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = [0/8 \quad 0/2] \begin{bmatrix} 0/805 & 0/195 \\ 0/715 & 0/285 \end{bmatrix} = [0/787 \quad 0/213]$$

بردار توزیع احتمال مرحله دوم نیز نشان می‌دهد که تعداد ۷۸/۷٪ از شرکت‌ها دارای جریان ورودی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری و ۲۱/۳٪ دارای جریان خروجی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری خواهند بود. برای سایر مراحل نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

پیش‌بینی در بلندمدت با استفاده از زنجیره‌های مارکوف

در قسمت قبل با در اختیار داشتن توزیع احتمال اولیه و ماتریس احتمال انتقال توانستیم توزیع احتمال وضعیت‌ها را در مراحل بعدی محاسبه نماییم. درواقع با محاسبه توزیع احتمال وضعیت‌ها در مراحل بعدی می‌توانیم نوعی پیش‌بینی در خصوص وضعیت‌های موجود در زنجیره به عمل‌آوریم. در این بخش به بحث در خصوص پیش‌بینی توزیع احتمال وضعیت‌های زنجیره مارکوف در بلندمدت با استفاده از نوع خاصی از ماتریس‌های احتمال انتقال، یعنی ماتریس تصادفی منظم، می‌پردازیم و پیش‌بینی در بلندمدت با استفاده از سایر ماتریس‌های احتمال انتقال را به بعد موکول می‌کنیم. در این راستا، ابتدا ماتریس تصادفی منظم معرفی‌شده و سپس پیش‌بینی توزیع احتمال در بلندمدت را موردبررسی قرار می‌دهیم.

ماتریس تصادفی منظم[1]

ماتریس تصادفی P را منظم می‌گویند هرگاه تمام مؤلفه‌های حداقل یکی از توان‌های ماتریس P مثبت باشد (صفر نباشد). به‌عنوان‌مثال، ماتریس تصادفی P_1 را در نظر بگیرید:

[1] Regular Stochastic Matrix

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

برای این ماتریس داریم:

$$P_1{}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

چون تمام مؤلفه‌های ماتریس $P_1{}^2$ مثبت می‌باشند، پس ماتریس P_1 یک ماتریس تصادفی منظم می‌باشد.حال، فرض کنید ماتریس تصادفی P_2 به‌صورت زیر باشد:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

در خصوص این ماتریس نیز داریم:

$$P_2{}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P_2{}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$P_2{}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، ساختمان ماتریس P_2 چنان است که سطر اول هر ماتریس P_2 مانند $P_2{}^m$ به‌صورت (1.0) درمی‌آید و بنابراین ماتریس P_2 منظم نیست.

در خصوص مثال شرکت نمونه، ماتریس احتمال انتقال از نوع ماتریس تصادفی منظم می‌باشد. زیرا تمام مؤلفه‌های حداقل یکی از توان‌های ماتریس P مثبت می‌باشد.

توزیع احتمال وضعیت‌ها در بلندمدت

فرض کنید، ماتریس P یک ماتریس تصادفی منظم باشد. در این صورت:

الف) ماتریس P دارای بردار احتمال ثابت t بوده و تمام مؤلفه‌های t مثبت هستند (هیچ‌یک صفر نیستند)،

ب) دنباله ماتریسی... $P.P^2.P^3.$ به سمت ماتریس T میل می‌کند که تمام سطرهای آن بردار ثابت t هستند،

پ) اگر P یک بردار احتمال دلخواه باشد، در این صورت دنباله برداری ... $\pi^{(0)}P.\pi^{(0)}P^2.$ به سمت بردار ثابت t میل می‌کند.

موارد فوق از طریق مثال شرکت نمونه موردبررسی قرار می‌گیرد. در مثال شرکت نمونه ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای و توان‌های مرتبه دوم، سوم، چهارم، پنجم و ششم ماتریس احتمال انتقال به‌صورت زیر می‌باشد:

$$P = \begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix}$$
$$P^2 = \begin{bmatrix} 0/805 & 0/195 \\ 0/715 & 0/285 \end{bmatrix}$$
$$P^3 = \begin{bmatrix} 0/7915 & 0/2085 \\ 0/7645 & 0/2355 \end{bmatrix}$$
$$P^4 = \begin{bmatrix} 0/7862 & 0/2138 \\ 0/7838 & 0/2162 \end{bmatrix}$$
$$P^5 = \begin{bmatrix} 0/7857 & 0/2143 \\ 0/7857 & 0/2143 \end{bmatrix}$$
$$P^6 = \begin{bmatrix} 0/7857 & 0/2143 \\ 0/7857 & 0/2143 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که از دنباله ماتریسی فوق مشهود است از توان مرتبه پنجم به بعد رابطه $P^5 = P^6 = P^7 = \cdots$ برقرار می‌باشد. یعنی این دنباله ماتریسی به سمت ماتریس $T = \begin{bmatrix} 0/7857 & 0/2143 \\ 0/7857 & 0/2143 \end{bmatrix}$ میل می‌کند. هر یک از سطرهای این ماتریس یک بردار ثابت به شکل $t = (0/7857.0/2143)$ می‌باشند. حال اگر دنباله برداری توزیع احتمال وضعیت‌های زنجیره را در مراحل مختلف را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\pi^{(0)} = [0/8 \quad 0/2]$$
$$\pi^{(1)} = [0/8 \quad 0/2]\begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix} = [0/79 \quad 0/21]$$
$$\pi^{(2)} = [0/8 \quad 0/2]\begin{bmatrix} 0/805 & 0/195 \\ 0/715 & 0/285 \end{bmatrix} = [0/787 \quad 0/213]$$
$$\pi^{(3)} = [0/8 \quad 0/2]\begin{bmatrix} 0/7915 & 0/2085 \\ 0/7645 & 0/2355 \end{bmatrix} = [0/7861 \quad 0/2139]$$
$$\pi^{(4)} = [0/8 \quad 0/2]\begin{bmatrix} 0/7862 & 0/2138 \\ 0/7838 & 0/2162 \end{bmatrix} = [0/7857 \quad 0/2143]$$
$$\pi^{(5)} = [0/8 \quad 0/2]\begin{bmatrix} 0/7857 & 0/2143 \\ 0/7857 & 0/2143 \end{bmatrix} = [0/7857 \quad 0/2143]$$
$$\pi^{(6)} = [0/8 \quad 0/2]\begin{bmatrix} 0/7857 & 0/2143 \\ 0/7857 & 0/2143 \end{bmatrix} = [0/7857 \quad 0/2143]$$

در دنباله فوق، از مرحله چهارم به بعد توزیع احتمال وضعیت‌ها با یکدیگر برابر بوده و داریم $\pi^{(4)} = \pi^{(5)} = \pi^{(6)} = \cdots$. بنابراین، توزیع احتمال وضعیت‌ها به بردار ماتریس ثابت $t = (0/7857.0/2143)$ میل می‌کند. با توجه به محاسبات صورت گرفته، ماتریس $P = \begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix}$ دارای بردار

ثابت به شکل $t = (0/7857.0/2143)$ می‌باشد. تفسیر نتایج حاصل آن است که در بلندمدت تقریباً معادل ۷۸/۵۷٪ از شرکت‌ها جریان‌های ورودی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری و ۲۱/۴۳٪ نیز جریان‌های خروجی حاصل از فعالیت‌های سرمایه‌گذاری را تجربه خواهند نمود.

نکته مهمی که بایستی در اینجا به آن اشاره نماییم این است که در خصوص ماتریس‌های تصادفی منظم توزیع احتمال اولیه وضعیت‌ها تأثیری بر توزیع نهایی وضعیت‌ها ندارد. بدین معنی که اگر توزیع اولیه وضعیت‌ها به‌جای $\pi^{(0)} = [0/2 \quad 0/8]$ به شکل $\pi^{(0)} = [0/65 \quad 0/35]$ باشد، توزیع احتمال نهایی همان بردار ثابت $t = (0/7857.0/2143)$ خواهد بود. این موضوع با انجام محاسبات زیر نشان داده‌شده است:

$$\pi^{(0)} = [0/65 \quad 0/35]$$

$$\pi^{(1)} = [0/65 \quad 0/35]\begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix} = [0/7535 \quad 0/2265]$$

$$\pi^{(2)} = [0/65 \quad 0/35]\begin{bmatrix} 0/805 & 0/195 \\ 0/715 & 0/285 \end{bmatrix} = [0/7821 \quad 0/2179]$$

$$\pi^{(3)} = [0/65 \quad 0/35]\begin{bmatrix} 0/7915 & 0/2085 \\ 0/7645 & 0/2355 \end{bmatrix} = [0/7854 \quad 0/2146]$$

$$\pi^{(4)} = [0/65 \quad 0/35]\begin{bmatrix} 0/7862 & 0/2138 \\ 0/7838 & 0/2162 \end{bmatrix} = [0/7857 \quad 0/2143]$$

$$\pi^{(5)} = [0/65 \quad 0/35]\begin{bmatrix} 0/7857 & 0/2143 \\ 0/7857 & 0/2143 \end{bmatrix} = [0/7857 \quad 0/2143]$$

$$\pi^{(6)} = [0/65 \quad 0/35]\begin{bmatrix} 0/7857 & 0/2143 \\ 0/7857 & 0/2143 \end{bmatrix} = [0/7857 \quad 0/2143]$$

محاسبات فوق این مطلب را تأیید می‌نماید که نوع توزیع احتمال اولیه وضعیت‌ها تأثیری بر توزیع احتمال نهایی آنها ندارد و بردار احتمال وضعیت‌ها به $t = (0/7857.0/2143)$ میل می‌کند.

بردار ثابت[1]

همان‌طور که تشریح گردید، بردار احتمال وضعیت‌ها در زنجیره مارکوف از مرحله‌ای به بعد حالت ایستا و مانا به خود می‌گیرد. به این بردار احتمال در اصطلاح بردار ثابت گفته می‌شود. اما سؤالی که مطرح می‌شود آن است که به چه روشی می‌توان این بردار را تعیین نمود. در پاسخ می‌توان گفت که اگر بردار n مؤلفه‌ای t و ماتریس $n \times n$ ، P چنان باشند که رابطه $tP = t$ برقرار گردد، در این صورت، بردار t ($t \neq 0$)، بردار ثابت ماتریس P گفته می‌شود. برای اینکه بحث موردنظر روشن شود به مثال شرکت نمونه بازمی‌گردیم. در مورد شرکت نمونه ماتریس احتمال انتقال به‌صورت زیر بود:

$$P = \begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix}$$

حال با تشکیل رابطه زیر و حل آن می‌توانیم مؤلفه‌های ماتریس ثابت را مشخص نماییم:

[1] Fixed Vector

$$uP = u \rightarrow [u_1 \quad u_2]\begin{bmatrix} 0/85 & 0/15 \\ 0/55 & 0/45 \end{bmatrix} = [u_1 \quad u_2]$$
$$\rightarrow \begin{cases} 0/85u_1 + 0/55u_2 = u_1 \\ 0/15u_1 + 0/45u_2 = u_2 \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} 0/15u_1 = 0/55u_2 \\ 0/15u_1 = 0/55u_2 \end{cases} \rightarrow u_1 = \frac{0/55}{0/15}u_2$$

حل دستگاه فوق با علم به اینکه ماتریس u یک ماتریس تصادفی بوده و جمع مؤلفه‌های آن برابر با ۱ می‌باشد، کامل می‌شود. یعنی:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{0/55}{0/15}u_2 \\ u_1 + u_2 = 1 \end{cases} \rightarrow u_1 = 0/7858\,, u_2 = 0/2143$$

همان‌طور که مشاهده می‌گردد، نتایج همان است که در بخش قبل به آن دست‌یافتیم.

ارائه مثالی در خصوص به‌کارگیری زنجیره‌های مارکوف

در حوزه تحقیقات و کاربرد حسابداری نمونه‌های واقعی متعددی یافت می‌شود که با استفاده از مدل‌سازی زنجیره مارکوفی می‌توان پیش‌بینی‌های مناسب را در خصوص آنها انجام داد. در ادامه مباحث، به نمونه‌ای کاربردی از این نوع مدل‌سازی در خصوص برآورد ذخیره مطالبات مشکوک الوصول اشاره می‌کنیم. فرض کنید شرکتی بر اساس تجزیه سنی حساب‌های دریافتنی به برآورد ذخیره مطالبات مشکوک الوصول می‌پردازد. این شرکت حساب‌های دریافتنی خود را بر اساس جدول زیر به‌منظور برآورد ذخیره مطالبات مشکوک الوصول تجزیه می‌نماید:

گروه اول:	بدهکارانی که کمتر از دو ماه به سررسید بدهی آنها باقی‌مانده است
گروه دوم:	بدهکارانی که بیش‌تر از دو ماه و کمتر از چهار ماه به سررسید بدهی آنها باقی‌مانده است
گروه سوم:	بدهکارانی که بیش‌تر از چهار ماه و کمتر از شش ماه به سررسید بدهی آنها باقی‌مانده است
گروه چهارم:	بدهکارانی که بیش‌تر از شش ماه و کمتر از هشت ماه به سررسید بدهی آنها باقی‌مانده است

در یک بررسی بر اساس تجربه دوره‌های قبل، جدول تغییر بدهکاران بر اساس گروه‌بندی صورت گرفته به شکل زیر تدوین گردید:

	گروه اول	گروه دوم	گروه سوم	گروه چهارم
گروه اول	۱۵۰	۸۰	۲۰	۵۰
گروه دوم	۷۵	۱۵	۵	۲۵
گروه سوم	۵۰	۳۰	۲۰	۱۰
گروه چهارم	۲۰	۱۰	۵	۵

تعبیر جدول فوق آن است که به‌عنوان‌مثال عدد ۱۵۰ نشان‌دهنده تعداد بدهکارانی است که گروه آنها تغییر ننموده است. عدد ۸۰ بیان‌کننده تعداد بدهکارانی است که از گروه اول به گروه دوم منتقل‌شده‌اند، بدین معنی که مدت سررسید بدهی آنها نسبت به دوره‌های قبل افزایش‌یافته است. یا در خصوص عدد ۲۰ می‌توان چنین گفت که تعداد ۲۰ بدهکار از بدهکاران شرکت که در دوره‌های قبل مدت سررسید بدهی آنها بین شش تا هشت ماه بود، به گروه اول منتقل‌شده‌اند بدین معنی که جزو بدهکاران خوش‌حساب منظور شده‌اند. در خصوص سایر مؤلفه‌های جدول تفسیرهای مشابهی می‌توان ارائه نمود.
با توجه به جدول تغییرات فوق، حال قصد داریم تا نرخ‌های تمرکز مطالبات در گروه‌های مختلف را تعیین نماییم. برای این منظور ابتدا ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای را تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/27 & 0/07 & 0/16 \\ 0/63 & 0/13 & 0/04 & 0/2 \\ 0/45 & 0/27 & 0/18 & 0/1 \\ 0/5 & 0/25 & 0/13 & 0/12 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که در فوق مشهود است، ماتریس تصادفی P یک ماتریس تصادفی منظم می‌باشد و بدون توجه به شکل بردار توزیع احتمال اولیه وضعیت‌ها می‌توان بردار ثابت توزیع احتمال وضعیت‌ها را تعیین نمود.
با تشکیل رابطه $tP = t$ می‌توانیم بردار ثابت توزیع احتمال وضعیت‌ها را مشخص کنیم. با حل رابطه $tP = t$ ، بردار ثابت توزیع احتمال وضعیت‌ها به این صورت حاصل گردید:

$$t = (0/53.0/23.0/08.0/16)$$

نتایج حاصل از بردار ثابت توزیع احتمال وضعیت‌ها نشان‌دهنده آن است که در آینده بیش از نیمی از مطالبات شرکت در گروهی قرار خواهد گرفت که سررسید آنها کمتر از دو ماه می‌باشد. به همین ترتیب، کمترین میزان مطالبات شرکت در گروه سوم قرار خواهد گرفت. استدلالی که نیز می‌توان از نتایج حاصله داشت آن است که ریسک عدم وصول مطالبات این شرکت در آینده نسبتاً پایین خواهد بود و مدیریت می‌تواند از این اطلاعات در برنامه‌ریزی‌های خود استفاده نماید.

نتیجه‌گیری

روش زنجیره‌های مارکوف یکی از ابزارهای توانمند برای مدل‌سازی پدیده‌های احتمالی می‌باشد که تاکنون در زمینه‌های مختلف علمی از آن استفاده‌شده است. ازجمله کارکردهای زنجیره‌های مارکوف می‌توان به استفاده آن در زمینه‌های بازرگانی اشاره نمود که حوزه حسابداری یکی از آنها می‌باشد. در این متن، ارتباطی بین مفهوم فرایندهای تصادفی و کاربست آن در حوزه حسابداری برقرار نمودیم، به امید اینکه بتوانیم در حوزه‌های عملی و علمی حسابداری به‌گونه‌ای از آن استفاده نماییم. این نوشتار مقدمه‌ای بود بر آنچه در گفتارهای بعدی به‌طور تفصیلی در خصوص فرایندهای مارکوف به آن خواهیم پرداخت.

فهرست منابع

۱. ارهان، چینلار. (۱۳۸۰). **آشنایی با فرآیندهای تصادفی**. غلامحسین شاهکار و سیدابوالقاسم بزرگ‌نیا. دانشگاه صنعتی شریف. موسسه انتشارات علمی.

۲. بولو، قاسم، حسنی، محمد، فراهانی، احسان، (۱۳۹۱)، "بررسی رابطه بین سودآوری، اقلام تعهدی و جریان های نقدی"، **مجله تحقیقات حسابداری و حسابرسی**،انجمن حسابداری ایران،شماره ۱۵.
۳. پاشا، عین اله. (۱۳۹۳). **فرآیندهای تصادفی**. دانشگاه پیام نور.
۴. پیلای، پاپولیس. (۱۳۹۴). **احتمال، متغیرها و فرآیندهای تصادفی**. محمود دیانی. تهران. انتشارات نص.
۵. چانگ، کای لای. (۱۳۷۹). **نظریه مقدماتی احتمال و فرآیندهای تصادفی**. ابوالقاسم میامنی و محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۶. لفبری، ماریو. (۱۳۹۴). **فرایندهای تصادفی کاربردی**. شقایق کردنوری و حمید رضا مصطفایی. تهران. سازمان انتشارات جهاد دانشگاهی.
۷. هاشمی، سید عباس، مطلبیان، مجتبی، (۱۳۹۲)، "بررسی رابطه بین جریان های نقدی عملیاتی غیر عادی با بازده سهام شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران"، **مجله مطالعات حسابداری و حسابرسی**، انجمن حسابداری ایران، شماره ۲.
۸. هیگنز، جیمز ج و مک نالتی، سالی کلر. (۱۳۸۸). **مفاهیم احتمال و مدل بندی تصادفی**. علی مشکانی. مشهد. انتشارات دانشگاه فردوسی.
9. Bass, Richard F. (2011). **Stochastic Process**. Cambridge University Press.
10. Bhattacharya, Rabi N, Waimire, Edward C. (2009). **Stochastic Process with Applications**. John Wiley and Sons.
11. Murali, R. S. (1994). “Markov analysis: Dealing with bad debts”. **The Journal of Management Accountant** 30 (5), 365-372.

تهران، میرداماد، نرسیده به میدان محسنی، خیابان حصاری، نبش کوچه دهم پلاک ۳۴

کدپستی: ۱۵۴۷۷۳۳۹۱۱

تلفن: ۲۲۲۲۷۲۲۱

فکس: ۲۲۹۰۷۶۷۲

وبسایت
www.iaaaas.com

ایمیل
iranianiaa@yahoo.com

Application of Stochastic Process Types of Markov Chains in Accounting

Said Rasoul Hosayni (PhD)[1]©
Assistant Professor of Accounting and Faculty Member of Zanjan University, Zanjan, Iran

(Received: 5 October 2019; Accepted: 5 February 2020)

Various uses have been made in the use of the discussion of stochastic processes in different areas of human knowledge. One of the most important processes involved in stochastic processes is the Markov process. It is important to study this type of process in the branches of basic science and engineering to understand the behavior of phenomena and modeling. But the use of this type of process is not limited to basic science and engineering, and can be used in various fields of human sciences for modeling. For example, in the field of demography, Markov chains can be helpful to predict the population of future generations or in the field of psychology to predict the behavior of individuals. Considering that the concept of stochastic processes in the field of accounting at the level of international and internal papers and studies has been very limited, this paper attempts to present theoretical concepts related to stochastic processes and then to indicate the Markov chains and the examples of their applications.

Keywords: Stochastic Process, Markov Chains, Transition Matrix, Fixed Vector.

[1] rasoulhosayni@yahoo.com ©(Corresponding Author)